ძვირფასო სტუდენტებო,
დავალების შესრულების დაწყებამდე,
გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

დავალება № 23. მრავალი ცვლადის ფუნქციები

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 22-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1- ა, ე, თ, მ	1- ბ, თ, კ, ნ, ო	2- ა, დ, ვ	2- ბ, გ, ე	3- გ, ე	3- ა, ბ, დ
4	5	6	7		

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

1. გამოთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობები მითითებულ წერტილებზე:

ა) $\boldsymbol{f(x,y)=5x+3y}$; $\boldsymbol{f(-1;2)}$, $\boldsymbol{f(3;0)}$.

ამოხსნა: $f(-1;2)=5\cdot(-1)+3\cdot 2=1$, $f(3;0)=5\cdot 3+3\cdot 0=15$.

პასუხი: $f(-1;2)=1$; $f(3;0)=15$.

ე) $\boldsymbol{g(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}}$; $\boldsymbol{g(4;5)}$.

ამოხსნა: $g(4;5)=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$.

პასუხი: $g(4;5)=3$

თ) $\boldsymbol{f(x,y)=xye^{xy}}$; $\boldsymbol{f(1;ln2)}$.

ამოხსნა: $f(1;ln2)=1\cdot ln2\cdot e^{1\cdot ln2}=ln2\cdot 2=2ln2$

პასუხი: $f(1;ln2)=2ln2$

მ) $\boldsymbol{g(x,y,z)=(x+y)e^{yz}}$; $\boldsymbol{g(1;0;-1)}$, $\boldsymbol{g(1;1;2)}$.

ამოხსნა: $g(1;0;-1)=(1+0)e^{0\cdot(-1)}=1$; $g(1;1;2)=(1+1)e^{1\cdot 2}=2e^2$

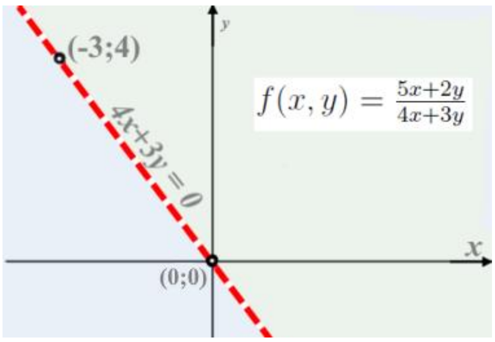
პასუხი: $g(1;0;-1)=1$; $g(1;1;2)=2e^2$

2-ა. ვიპოვოთ $f(x,y)=\dfrac{5x+2y}{4x+3y}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

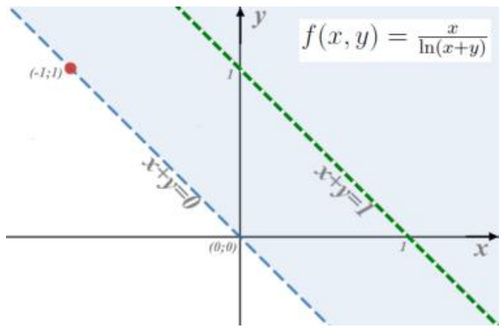
ამოხსნა: ცხადია, ამ გამოსახულების გამოსათვლელად საჭიროა წილადის მნიშვნელი განსხვავდებოდეს 0-გან: $4x+3y\neq 0$. ამიტომ განსაზღვრის არე —

$$D_f=\{(x;y)\mid 4x+3y\neq 0\}.$$

$4x+3y\neq 0$ უტოლობის ამოსახსნელად, ავაგოთ წრფე $4x+3y=0$. წყვილი $(x;y)$, არის მისი ამონახსენი თუ შესაბამისი $P(x;y)$ წერტილი არ ძევს ამ წრფეზე. ნახ. 2ა-ზე ეს წრფე ნაჩვენებია წყვეტილით. ე.ი. მის გარეთ მოთავსებული წერტილები შეესაბამება D_f -ს.



ნახ. 2ა .



ნახ. 2დ.

პასუხი. $D_f=\{(x;y)\mid 4x+3y\neq 0\}$; იხ. ნახ.2-a.

2-დ. ვიპოვოთ $f(x,y)=\dfrac{x}{\ln(x+y)}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა. ამ გამოსახულების გამოთვლის ბოლო მოქმედებაა გაყოფა. ის რომ შესრულდეს საჭიროა მნიშვნელი არ იყოს 0: $\ln(x+y)\neq 0$. ამოვხსნათ ეს უტოლობა: ლოგარითმის თვისებების მიხედვით ცხადია:

$$\ln(x+y)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y>0 \\ x+y\neq 1 \end{cases}$$

მაშასადამე,

$$D_f=\{(x;y)\mid x+y>0,\, x+y\neq 1\}.$$

ვაჩვენოთ საკოორდინატო სიბრტყეზე ეს სიმრავლე. ადვილი მისახვედრია, $x+y>0$ უტოლობის ამონახსნებია $x+y=0$ წრფის ზევით მდებარე წერტილები (იხ. ნახ. 2-დ ; გამუქებულია). სისტემის მეორე პირობის მიხედვით, ამ ერთობლიობიდან თუ ამოვაგდებთ $x+y=1$ წრფის წერტილებს, დარჩენილები დააკმაყოფილებს პირობას $\ln(x+y)\neq 0$.

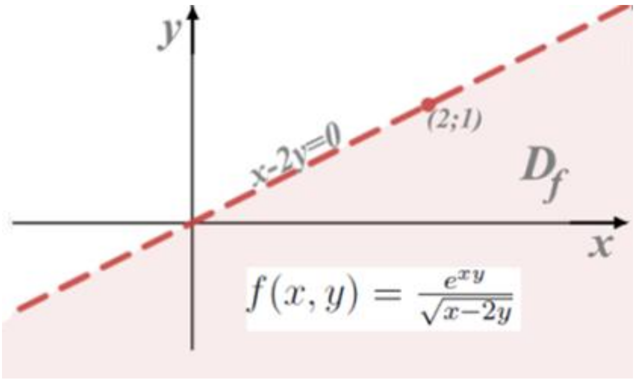
პასუხი. $D_f=\{(x;y)\mid x+y>0,\, x+y\neq 1\}$; ნახ.2-დ.

2-ვ. ვიპოვოთ $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{\sqrt{x-2y}}$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა. მარჯვენა მხარის გამოთვლისას, ბოლო ოპერაციაა გაყოფა, რისთვისაც საჭიროა გამყოფი (მნიშვნელი) არ იყოს 0-ის ტოლი $\sqrt{x-2y} \neq 0$. ფესვის თვისებების ძალით, ეს მხოლოდ მაშინ მოხდება, როცა $x-2y>0$. მაშასადამე, ფუნქციის განსაზღვრის არეა სიმრავლე

$$D_f = \{(x;y), \text{სადაც } x-2y>0\}.$$

$x-2y>0$ უტოლობის ამოსახსნელად ავაგოთ წრფე $x-2y=0$ და დავადგინოთ რომელ ნახევარ-სიბრტყეში სრულდება $x-2y>0$ პირობა; ესაა ამ წრფის ქვემოთ მოთავსებული ნახევარსიბრტყე; იხ. ნახ. 2ვ.



ნახ. 2ვ

პასუხი. $D_f = \{(x;y) \mid x-2y>0\}$; იხ. ნახ.2-ვ.

3-გ. მოცემულია $f(x,y)=x^2-4x-y$ ფუნქცია. ავაგოთ მისი $f(x,y)=C$ დონის წირი, $C=-4$ და $C=5$ მნიშვნელობებისთვის.

ამოხსნა. $C=-4$ შემთხვევაში დონის წირის განტოლებაა $x^2-4x-y=-4$. ცხადია

$$x^2-4x-y=-4 \Leftrightarrow y=x^2-4x+4 \Leftrightarrow y=(x-2)^2.$$

ე.ი. ეს დონის წირი ემთხვევა კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს. ის აგებულია ნახ.3-გ-ზე (ლურჯი).
$C=-5$ შემთხვევაში დონის წირის განტოლებაა $x^2-4x-y=5$. ცხადია

$$x^2-4x-y=5 \Leftrightarrow y=x^2-4x-5 \Leftrightarrow y=(x+1)(x-5).$$

ანუ, ამ შემთხვევაშიც დონის წირი ემთხვევა კვადრატული ფუნქციის გრაფიკს... იმავე ნახაზზე ისიც აგებულია...
პასუხი. იხ. ნახაზი 3-გ.

3-ე. მოცემულია $f(x,y)=xy$ ფუნქცია. ავაგოთ მისი $f(x,y)=C$ დონის წირი, $C=-2$, $C=-1$, $C=1$და $C=2$ მნიშვნელობებისთვის.

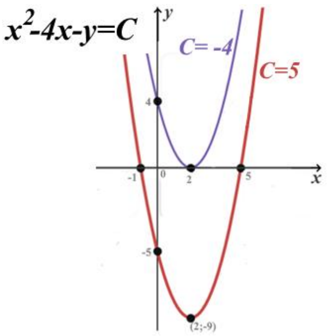
ამოხსნა. შევიტანოთ C-ს ეს მნიშვნელობები $f(x,y)=C$ განტოლებაში. მივიღებთ შემდეგ ოთხ განტოლებას:

$$xy=-2,\ xy=-1,\ xy=1 \text{ და } xy=2.$$

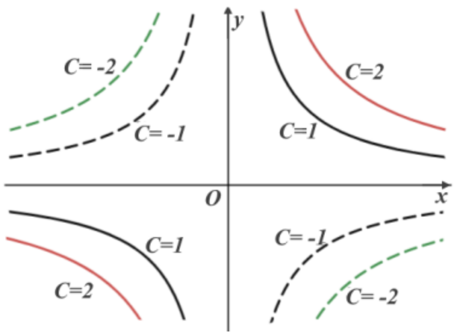
გამოვსახოთ y, თითოეულიდან. შესაბამისად მივიღებთ:

$$y=\frac{-2}{x},\ y=\frac{-1}{x},\ y=\frac{1}{x} \text{ და } y=\frac{2}{x}.$$

თითოეული არის $y=\frac{k}{x}$ სახის ფუნქცია, სადაც k რიცხვია. ასეთ ფუნქციებს ეწოდება უკუპროპორციული დამოკიდებულებები — კარგად ნაცნობი სკოლიდან. მათ გრაფიკებს ჰიპერბოლას უწოდებენ... გამოდის განსახილავი დონის წირები ემთხვევა ჰიპერბოლას, k პარამეტრის სათანადო მნიშვნელობისათვის. ისინი ნაჩვენებია ნახაზზე 3-ე.



ნახ. 3-გ.



ნახ. 3-ე.

პასუხი. იხ. ნახ. 3-ე.

4. ვთქვათ, ქარხანაში გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობა გამოისახება ქობ-დაგლასის ფუნქციის საშუალებით $Q(K,L)=120\,K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$, სადაც K არის ინვესტირებული კაპიტალი (ათას ერთეულში), ხოლო L - სამუშაო დროის რაოდენობა.

ა) გამოთვალეთ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა, თუ ინვესტირებულია 125000 ლარი და გამოყენებულია მუშახელის 1331 სამუშაო საათი.

ბ) გაარკვიეთ, რა მოუვა ა) პუნქტში მიღებულ შედეგს, თუ ინვესტირებული თანხა და მუშახელის სამუშაო დრო განახევრდება.

ამოხსნა: ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, $K=125$ (ათასი), $L=1331$, მაშინ

$Q(125{,}1331)=120\cdot125^{\frac{2}{3}}\cdot1331^{\frac{1}{3}}=120\cdot25\cdot11=33000$ (ათასი ერთეული)

ბ) შევაფასოთ $Q(K,L)$, როცა $K=\frac{125}{2}$ (ათასი) და $L=\frac{1331}{2}$. გვექნება,

$Q\left(\frac{125}{2},\frac{1331}{2}\right)=120\cdot\left(\frac{125}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1331}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=120\cdot\frac{25\cdot11}{2}=\frac{33000}{2}=16500$ (ათასი ერთეული)

ამგვარად, ინვესტირებული თანხისა და მუშახელის სამუშაო დროის განახევრებამ გამოიწვია წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის განახევრებაც.

პასუხი: ა) 33000000 ერთეული; ბ) 16500000 ერთეული (წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა განახევრდება)

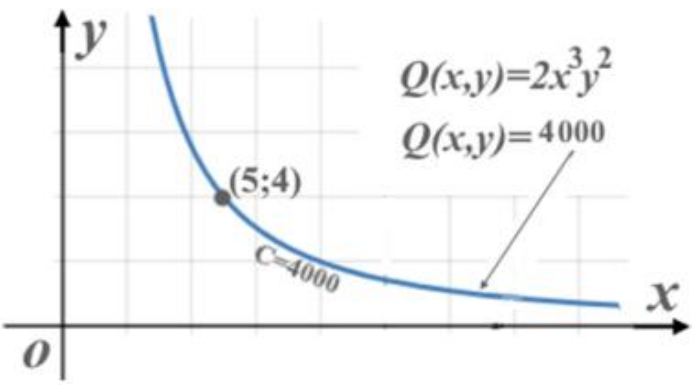
6. ვთქვათ, სარგებლიანობა (კმაყოფილება), რომელსაც იღებს მომხმარებელი პირველი პროდუქტის x ერთეულის და მეორე პროდუქტის y ერთეულის შეძენით, გამოისახება $U(x,y) = 2x^3y^2$ სარგებლიანობის ფუნქციით. იპოვეთ მომხმარებლის კმაყოფილების დონე იმ შემთხვევაში, როცა ის ფლობს პირველი პროდუქტის $x = 5$ ერთეულს და მეორე პროდუქტის $y = 4$ ერთეულს. ააგეთ შესაბამისი მრუდი.

ამოხსნა: მომხმარებლის კმაყოფილების მიმდინარე დონეა
$U(5;4) = 2 \cdot 5^3 \cdot 4^2 = 2 \cdot 125 \cdot 16 = 4000,$
შესაბამისი მრუდის განტოლებას კი ექნება შემდეგი სახე :

$$2x^3y^2 = 4000$$

$$x^3y^2 = 2000,$$

ანუ $y = 20\sqrt{5} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$.



ნახ.6

პასუხი: $U(5;4) = 4000$ (მომხმარებლის კმაყოფილების დონე)
$x^3y^2 = 2000$ (მრუდის განტოლება). მრუდი იხ.ნახ 6.